שאלה מס' 1 : (30 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים שלה ואת הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי.

ב. (10 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל R ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$.

ג. (10 נק') נגדיר $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ כך ש $T(v) = A\cdot v$. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של T.

ד. (5 נק') קבעו האם הטענה הבאה נכונה או לא. אם היא נכונה הוכיחו אותה ואם היא לא נכונה הביאו דוגמא נגדית:
אם B היא מטריצה הדומה ל- A אז מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $B\bar{x} = 0$ שווה ל $Ker(T)$ (כאשר A היא המטריצה הנתונה ו- T האופרטור המוגדר בסעיף ג').

נא לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

ב.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ 1 & \lambda+4 & 3 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + R_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ 1 & \lambda+4 & 3 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 - C_3}{=}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda+1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\left[(\lambda+1)^2 - 1\right] = (\lambda+2)^2(\lambda).$$

$\lambda_1 = -2$ $\quad r.a. = 2$

$\lambda_2 = 0$ $\quad r.a. = 1.$

לכל ערך $\lambda = 0$: לפתור $A\bar{x} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \dots \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0. \end{cases} \Longrightarrow (x,y,z)=(x,-x,x)=$$
$$x(1,-1,1).$$

מ"ג של 0 = 1 כי מ"ל = 1.

לגבי $\lambda=-2$: כלומר $(-2I-A)\bar{x}=0$

$(2I+A)\bar{x}=0.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x+2y+3z=0. \\ x=-2y-3z \end{array}$$

$(x,y,z)=(-2y-3z,y,z)=$

$y(-2,1,0)+z(-3,0,1)$

מ"ג של $\lambda_1=-2$ הוא 2

לכן לא מ"ל = מ"ג.

$P^{-1}DP$ בלכסון.

ג. לפי הגדרת T, A מייצגת לפי בסיס סטנדרטי.

גרעין = מרחב שדות של $\lambda_2=0$ לכן בסיס ל $\ker T$ $\{(1,-1,1)\}$

$\dim \ker T=1$.

תמונה: מרחב העמודות: לפי משפט המימדים $\dim \operatorname{Im} T=2$

לכן נבחר 2 עמודות בלתי. בסיס לתמונה:

$\{(-1,-1,1),(2,-4,2)\}$

הערה: אפשר גם לגזור את A^t, אפשר גם לטעון שזה המרחב השורשי של $\lambda_1=-2$. כי אלו שתי תמונות בלתי ומימד התמונה 2.

3. בטבלה.

א. פולינום אופייני:

$\lambda(\lambda+2)^2$

ע"ע	ר"א
-2	2
0	1

ב. A לכסינה כי: לכל ע"ע

"כל" = ר"ג

$$P=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

ג. בסיס ומימד לגרעין: $\{(1,-1,1)\}$

מימד 1.

בסיס ומימד לתמונה: $\{(2,-4,2)\ (1,-1,-1)\}$

מימד 2.

ד. הוכחה או דוגמא נגדית:

טענה זו נכונה.

לפי סעיף ב' A

דומה ל D.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ נותן את $Dx=0$

אותו זה את $Ax=0$

לפי סעיף ב' (מאחר

שדמי שם 0).

<u>שאלה מס' 2</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') אם A מטריצה הפיכה וסכום כל שורה שלה שווה ל- 1 אז גם סכום כל שורה של A^{-1} שווה ל- 1.

ש. נשו/- מהנתון $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. A הפיכה לכן נכפל ב A^{-1}

ונקבל $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ ולכן המשפט הינו ש סכום כל

שורה ב A^{-1} הינו 1.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אם $A=\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ v_4\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית ב-V, אז גם $B=\{v_1-2v_4\ ,\ v_2-5v_4\ ,\ v_3+7v_4\ ,\ v_4\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית ב-V.

ב. נשו. יהי $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ כך ש-

$$\alpha(v_1-2v_4)+\beta(v_2-5v_4)+\gamma(v_3+7v_4)+\delta(v_4)=0.$$

$$v_1(\alpha)+v_2(\beta)+v_3(\gamma)+v_4(-2\alpha-5\beta+7\gamma+\delta)=0.$$

$v_1 \dots v_4$ בת"ל לכן כל הסקלרים 0:

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ -2\alpha-5\beta+7\gamma+\delta=0\end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$$

ג. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהיו U,W שני תת מרחבים של V כך ש $V=U\oplus W$.
נגדיר $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים לכל $u\in U$, $w\in W$ $T(u+w)=u-w$;
אזי T הפיך.

מהנתון לכל $v\in V$ ניתן לכתוב באופן יחיד
$v=u+w$ כאשר $u\in U$, $w\in W$.
יהי $v\in \ker T$ לכן $v=0$.

$T(v)=T(u+w)$

לכן $v=u+w$

מהנתון $T(u+w)=u-w=0$ לכן $u=w$
כלומר $u\in U$ ולכן $u\in W$ כלומר $u\in U\cap W$
לכן u,w בהתאמה. הסכום ישר לכן $U\cap W=\{0\}$
$u=w=0$
לכן $v=0+0=0$
T אופרטור חח"ע
לכן גם הפיך.

ד. (7 נק') אם A מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אז A^2+I הפיכה.

לא נכון.

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לפי הנתון זו 2x2 עם 2 ע"ע שונים כל אחד $=1$. אין

$$A^2+I=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי הנתון זו הבחירה 1 ולא 2.

שאלה מס' 3 : (5 נקודות)

יהי z_0 אחד הפתרונות של המשוואה $z^2-2\cos\alpha\cdot z+1=0$ כאשר α זווית **נתונה**. אזי $z_0^7+\frac{1}{z_0^7}$

שווה ל:

א. $\cos 7\alpha+i\sin 7\alpha$.

ב. $\frac{\sin 7\alpha}{\cos 7\alpha}$.

ג. $2\cos 7\alpha$.

ד. $\sin 7\alpha$.

ה. $7(\cos\alpha+i\sin\alpha)$.

שאלה מס' 4 : (5 נקודות)

יהי: $V=\mathbb{R}_4[x]$, ויהיו U , W שני תתי מרחבים של V ממימד 4 כל אחד. נתון כי $1+x^2\in U$ אבל $1+x^2\notin W$. אזי $\dim(U\cap W)=$:

א. 0 ; ב. 1 ; ג. 2 ; ד. 3 ; ה. 4

שאלה מס' 5 : (5 נקודות)

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. ותהי A^2+AB הפיכה.

אזי הטענה היחידה **שאיננה** נכונה היא:

א. A^2 בהכרח הפיכה.

ב. A^2-AB בהכרח הפיכה.

ג. A^2+BA בהכרח הפיכה.

ד. אם גם AB הפיכה אז בהכרח B^2+AB הפיכה.

ה. אם AB אינה הפיכה אז בהכרח B אינה הפיכה.

שאלה מס' 6 : (5 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. ויהי $b\neq 0$ ב $\mathbb{R}^n$.

א. אם למערכת $A\overline{x}=0$ יש אינסוף פתרונות אז למערכת $A'\overline{x}=b$ יש אינסוף פתרונות.

ב. אם למערכת $A\overline{x}=b$ יש פתרון יחיד אז למערכת $(A+A')\overline{x}=0$ יש פתרון יחיד.

ג. אם למערכת $A\overline{x}=0$ יש אינסוף פתרונות אז למערכת $A\overline{x}=b$ יש אינסוף פתרונות.

ד. אם למערכת $A\overline{x}=b$ יש פתרון יחיד אז למערכת $AA'\overline{x}=b$ יש פתרון יחיד.

ה. אם למערכת $A\overline{x}=b$ אין פתרון אז למערכת $A'\overline{x}=b$ אין פתרון.

שאלה מס' 7 : (5 נקודות)

נתון: $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ כאשר $a\in\mathbb{R}$. אם A הפיכה אז $(A)_{11}\cdot(A^{-1})_{11}$ שווה ל:

א. 1 ; ב. $\frac{1}{a}$; ג. a ; ד. $\frac{1}{a^2}$; ה. a^2-1 .

שאלה מס' 8 : (5 נקודות)

יהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x+y & -y+z \\ 3w & w \end{pmatrix}$$

נתון שקיים ל- $\mathbb{R}^{2\times2}$ בסיס סדור B כך ש-

$$[T]_B=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

אזי:

א. $a=0$ וגם $b\neq0$;

ב. $a=1$ וגם $b=0$;

ג. $a=-1$ וגם $b=1$;

ד. a כלשהו וגם $b=0$;

ה. $a=1$ וגם b כלשהו ;

שאלה מס' 9 : (10 נקודות)

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא נכונה, וסמנו את התשובה במקום המתאים בטבלה (אין צורך לנמק. נימוקים לא ייבדקו):

טענה	נכון	לא נכון
1. אם $A,B\in\mathbb{R}^{nxn}$ אז $rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$.	✓	
2. V מרחב וקטורי מעל F, ו- U_1,U_2,U_3 שלושה תת מרחבים של V אזי $(U_1+U_2)\cap U_3=(U_1\cap U_3)+(U_2\cap U_3)$.		✓
3. $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=(p(8)\ ,\ p'(\pi))$, היא העתקה לינארית.	✓	
4. אם $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ בעלת פולינום אופייני λ^n-8 אז A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.	✓	
5. לא קיים אופרטור לינארי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ המקיים: $\mathrm{Im}(T)=Ker(T)=span\{1+x\ ,\ 1-x^2\}$.		✓